A VALÓSZÍNŰSÉG MATEMATIKAI FOGALMÁRÓL

Mint minden fogalom, a valószínűség matematikai fogalma is fokozatosan alakult ki. *Pascal* és *Fermat* leveleiben a valószínűség fogalma explicit alakban nincs definiálva. Érdekes, hogy *Huyghens* művében az alapfogalom nem a valószínűség, hanem a nyereség várható értéke. *Huyghens* a várható értéket a következőképpen definiálja: Ha p esetben a összeget nyerek, q esetben pedig b összeget és az összes esetek „egyformán lehetségesek", úgy nyereségem várható értéke $\frac{pa+qb}{p+q}$.

J. Bernoulli „Ars Coniectandi"-jának 4. részében találkozunk először a valószínűség „definíciójával". *Bernoulli* szerint „*a valószínűség a bizonyosság foka és úgy viszonylik a bizonyossághoz, mint a rész az egészhez*". Ezen inkább filozófiai, mint matematikai jellegű „definíció" mellett szerepel *Bernoulli*-nál a valószínűség ún. „klasszikus definíció"-ja is, amely szerint „*egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosával, feltéve, hogy ezen esetek mind egyformán lehetségesek*". A valószínűség definíciójának ez a megfogalmazása *Bernoulli*-nál nem pontosan így szerepel; a fenti fogalmazás *Laplace* „Théorie analytique de la probabilité" c. alapvető, a klasszikus valószínűségszámítás eredményeit összegező és a további fejlődésnek nagy lökést adó munkájában található. Ugyanez a definíció szerepel *Laplace* „Essai philosophique sur les probabilités" című munkájában is, amely a valószínűség fogalmával kapcsolatos elvi kérdé-

seknek igen világos, részletes, gondolatébresztő és élvezetes kifejtését tartalmazza. Bár a valószínűség fent említett klasszikus definíciója *Pascal* valódi leveleiben explicite nem szerepel, úgy hisszük, nem anakronizmus, hogy e definíció a mi Pascal-leveleinkben előfordul, hiszen *Pascal* ténylegesen e definíciót használta *de Méré* feladatainak megoldása során. E definíció gyakorlati szempontból kielégítő volt mindaddig, amíg a valószínűségszámítás főként szerencsejátékokra vonatkozó elemi feladatokkal foglalkozott. Elvi szempontból azonban e definíció nem kielégítő, annak ellenére, hogy ma is helytálló az, amit *Pascal* a 2. levélben e definíció védelmében mond, ti., hogy e definíció csak látszólag tartalmaz circulus vitiosus-t.

E definíciónak valóban nem ez a hibája, hanem az, hogy nem is definíció. Arra a kérdésre, hogy mi is tulajdonképpen a valószínűség, e definíció nem ad választ, csak azt mondja meg, hogy a legegyszerűbb esetekben* hogyan lehet azt kiszámítani.

A valószínűségszámítás első művelői valójában nem is tekintették másnak; a valószínűség definíciójának ők inkább *Bernoulli* fent idézett meghatározását tekintették (mely szerint a valószínűség a „bizonyosság foka"), vagy nem is igen érezték szükségét egy formális definíciónak, mert a valószínűséget olyan alapfogalomnak tartották, amelynek jelentése evidens és nem szorul magyarázatra. Feladatukat csak abban látták, hogy konkrét problémáknál kiszámítsák az azokban szereplő események valószínűségét. Figyelembe véve a matematika akkori fejlettségi fokát, ezen nem is csodálkozhatunk, hiszen pl. a XVIII. században a számfogalom, a függvény vagy a határérték fogalma sem volt

* Modern terminológiával az ún. „klasszikus valószínűségi mezők" esetében.

mai értelemben igazán tisztázott, de akkoriban ennek hiányát sem érezték.

Gyökeresen megváltozott azonban a helyzet a XIX. században, amikor a matematika és a matematikai szabatosság fogalma alapvető átalakuláson ment keresztül. Kialakult a matematikára és annak a valósághoz való viszonyára vonatkozó mai felfogás, mely szerint a matematika minden egyes fejezetét axiomatikusan, reális hátterétől elvonatkoztatva kell felépíteni, mint önmagában zárt, logikailag ellentmondásmentes, absztrakt elméletet, amelyben az alapfogalmakat nem kell és nem is lehet definiálni és azoknak semmilyen más tartalmat nem szabad tulajdonítani, mint ami az axiómákban implicite bennfoglaltatik.

Az ily módon axiomatikusan felépített matematikai elméletek a valóság leírására mármost úgy használhatók fel, hogy ezek a valóság bizonyos aspektusainak elvont modelljeiként szolgálhatnak. A matematika e modern felfogásának konzekvens keresztülvitele alapvetően átformálta magát a matematikát és egy új rohamos fejlődés kiindulópontjául szolgált. A halmazelmélet, a valós függvénytan, a topológia, a modern algebra és a funkcionálanalízis létrejöttével, a matematikai logika kifejlődésével a matematika arculata gyökeresen megváltozott. A matematika elvi kérdéseinek tisztázása hatalmas lendületet adott a matematika felhasználásának a természettudományokban és a társadalomtudományokban egyaránt. Ebből a nagyszabású átalakulásból és az ennek nyomán meginduló fejlődésből a valószínűségszámítás meglepően sokáig, egészen a XX. század elejéig kimaradt. Bár a XIX. században *Gauss, Laplace, Poisson, Csebisev, Markov, Bertrand, Poincaré* és sokan mások számos eredménnyel gyarapították a valószínűségszámítást és ugyanakkor a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásai nagy jelentőségre tettek

szert a természettudományokban, a társadalomtudományokban és a gazdasági életben, a valószínűségszámítás matematikai elméletének elvi alapjai terén lényeges előrehaladás nem történt.

Ez az elmaradás ahhoz vezetett, hogy a XX. század elején a matematikusok zöme a valószínűségszámítást nem is fogadta el a matematika szerves részének, egyenrangú ágának, hanem a matematika és a fizika, ill. a filozófia között közbenső helyet elfoglaló és meglehetősen kétes értékű tudományágnak tekintette. *Hilbert* már 1900-ban felismerte e lemaradás káros voltát és ezért a matematika legaktuálisabb megoldatlan feladatainak általa összeállított híres listájába felvette a valószínűségszámítás axiomatikus megalapozásának — és ezzel a matematika XX. századbeli színvonalára való felemelésének — problémáját. E feladat megoldására az első jelentős kísérletet *R. v. Mises* tette meg 1919-ben (lásd [15]). Bár az általa javasolt felépítés nem bizonyult célravezetőnek és ma már inkább csak történeti jelentősége van, az általa kiváltott viták számos matematikus érdeklődését keltették fel a probléma iránt. A valószínűségszámításnak a modern matematika szellemében való szabatos, axiomatikus megalapozását kielégítően elsőnek *A. N. Kolmogorov* (lásd [16]) oldotta meg* 1933-ban.

A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle axiomatikus elméletében a véletlen eseményeket halmazok reprezentálják és a valószínűség egyszerűen egy e halmazokon értelmezett normált mérték. *Kolmogorov* elméletében a várható érték mint (absztrakt) Lebesgue-féle integrál van értelmezve. Azáltal, hogy *Kolmogorov* a valószínűségszámítást a halmazelmélet, ill. a mértékelmélet alapjaira helyezte, egy csapásra

* Kolmogorov elmélete, mint minden tudományos felfedezés, számos előzményre támaszkodott. Kolmogorov elméletének előzményeit lásd [17]-ben.

nemcsak a valószínűségszámítás logikailag kielégítő megalapozását adta meg, hanem azt bekapcsolta a modern matematika vérkeringésébe és lehetővé tette a matematika fejlett modern ágainak felhasználását a valószínűségszámításban. *Kolmogorov* elmélete, egyszerűsége és említett előnyei folytán rövidesen általánosan elfogadottá vált és az elmúlt 30 évben a valószínűségszámítási kutatások szilárd alapjául szolgált.* Az alapok tisztázása ugrásszerű fejlődést tett lehetővé mind a valószínűség matematikai elméletében, mind pedig az elmélet alkalmazásai terén. A valószínűségszámítás azóta rohamos léptekkel halad előre és egyre szélesebb területen kerül eredményes felhasználásra.

* Bizonyos fizikai, statisztikai és más alkalmazásokkal kapcsolatos problémák szükségessé tették a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elméletének bizonyos irányú általánosítását, az ún. feltételes valószínűségi mezők fogalmának bevezetését (lásd [18]); ez az elmélet azonban nem jelent eltérést a Kolmogorov-féle elmélettől, hanem annak logikus továbbfejlesztésének tekinthető, melynek alapgondolatát maga Kolmogorov vetette fel elsőnek, bár azt nem dolgozta ki.

Kedves Olvasó!

Átolvasva előző Önhöz
egészítésre szorul. Csak az
tottam a fiktív Pascal-leve
lésére, de nem szóltam a
vezetett arra, hogy e kérd
hiányt igyekeztem pótolni

A 4. függelékben rámu
számítás matematikai elmé
értés uralkodik a hozzáé
mondható ez el azonban a
ről. E kérdések a valószínű
viszonyára, a valószínűség
ságára, interpretációjára v
képpen nem is matematika
fiai, ismeretelméleti jellegű
kérdések ma is vita tárgy

Aki a valószínűségszám
aki a valószínűségszámítá
sikerrel alkalmazni kívánja
akarja, hogy a valószínűsé
nyújthat a kutatónak vag
hetetlenül szembekerül e

A valószínűségszámítás
képzettségű és érdeklődé
során, valamint a valószín
foglalkozás során egyarán