Logaritmusos azonosságok

Legyen aϵR és 0<a és a≠1, illetve x,yϵR és 0<x és 0<y.

Az a kérdés tudjuk e más alakra hozni egy szorzat logaritmusát, azaz $log_a(x \cdot y) =?$
Írjuk fel x-et és y-t az "a" hatványaként, a kitevők a logaritmus definíciójából következően x-nek, illetve y-nak "a" alapú logaritmusai, azaz:

$x = a^{log_a(x)}$, illetve $y = a^{log_a(y)}$.

Ezek után alakítsuk át az $log_a(x \cdot y)$-t, felhasználva az azonos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot, illetve a logaritmus definícióját fordított értelemben is:

$$\boldsymbol{log_a(x \cdot y)} = log_a\left(a^{log_a(x)} \cdot a^{log_a(y)}\right) = log_a\left(a^{log_a(x)+log_a(y)}\right) = \boldsymbol{log_a(x) + log_a(y)}$$

(Az elejét és a végét kell nézni.)

Hasonlóan járhatunk el a hányados logaritmusa esetében is. Ez esetben az azonosság:

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$$

Végezzék el a bizonyítást az előzőhöz hasonlóan! Persze most az azonos alapú hatványok hányadosára vonatkozó azonosságot kell alkalmazni.

Nézzük még meg a hatvány logaritmusát (most is használva x fönti hatványalakban való felírását):

$$\boldsymbol{log_a(x^n)} = log_a\left((a^{log_a(x)})^n\right) = log_a\left(a^{n \cdot log_a(x)}\right) = \boldsymbol{n \cdot log_a(x)}$$

(Itt is az elejét és a végét kell nézni.)

Ha már benne vagyunk, nézzük meg az "átíró képlet" bizonyítását is (legyen b-re is igaz: bϵR és 0<b és b≠1). Használjuk ismét a $x = a^{log_a(x)}$ kifejezést és vegyük mindkét oldal b alapú logaritmusát és alkalmazzuk az előbb levezetett azonosságot.

$\boldsymbol{log_b(x)} = log_b\left(a^{log_a(x)}\right) = \boldsymbol{log_a(x) \cdot log_b(a)}$, ebből pedig "leosztás" után, megkapjuk a bizonyítani kívánt azonosságot (a két végét kell tekinteni):

$$\frac{\boldsymbol{log_b(x)}}{\boldsymbol{log_b(a)}} = \boldsymbol{log_a(x)}$$

(Fel lehet cserélni az oldalakat.)

* * *