

Termodinamika (gázok) – segédlet és minta feladatok

(Feladatmegoldások a legvégén.)

A szóban lévő elmélet (matematikai modell) jól írja le a gázok jelentős részének viselkedését, pl.: oxigén, hidrogén, nitrogén, hélium, stb. – az elmélet "ideálisgázoknak" nevezi ezeket.

Alapfeltételek (alaptörvények) nyugvó gázok esetére (nyomás: p , térfogat: V):

1. Elegendően lassú folyamat esetén: $p \cdot V = \text{állandó}$ (Boyle-Mariotte-törvény);
2. A gáz "részecskemodelljéből" nyert eredmény szerint a gázrészecskék összegzett mozgásból eredő energia (a gáz belső energiája): $E_b = (f/2) \cdot p \cdot V$ (láthatóan, amikor a Boyle-Mariotte-törvény érvényes, akkor az E_b állandó, "f" a gázrészecskék szabadsági foka: 3,5,6);
3. A gázon végzett – úgynevezett térfogati (pl. összenyomás) – munka, kis térfogatváltozás esetén: $-p \cdot \Delta V$ (így a mínusz jellel, a gáz összenyomása esetén pozitív, ha a gáz tágul, akkor negatív);

A Boyle-Mariotte-törvény érvényességi körében az előbbieket ellent mondanak az úgynevezett "Munka tételnek", mármint, hogy $\Delta E = W$ (azaz azzal, hogy a rendszer összes energiájának megváltozása egyenlő a rajtavégzett munkával). Ha lassan összenyomva a gázt, a 1. pont szerint $p \cdot V$ nem változik, így 2. pont szerint E_b sem – pedig az összenyomás révén munkát végeztünk a gázon...

Ezek szerint a befektetett munka révén keletkező többlet energia valamilyen "misztikus" módon/formában "elfolyik". Ezek szerint kell lennie egy másfajta – klasszikus munkavégzéstől különböző, attól független – munka (energia áramlási) félének is. Ezt nevezhetjük **hőhatásnak**, **hőnek**: Q .

Az a kitétel ezen elméletben, hogy "Boyle-Mariotte-törvény érvényességi körében", tapasztalati értelemben az "állandó hőmérsékleten" megállapítással azonos (elemi tapasztalás, hogy egyik tárgy melegebb tud lenni, mint a másik). A hőmérséklet elméleten belüli (egzakt) meghatározására, mérésének megalapozására az $E_b = (f/2) \cdot p \cdot V$ összefüggés ad lehetőséget.

Vékony és egyben merev falú fém tartályba zárt ideális gáz (pl. hélium). A tartály merev fala miatt (térfogati) munkára nincs lehetőség, tehát csak hőhatásról lehet szó (más néven termikus kölcsönhatás, pl. melegítés. Tegyük az említett tartályt jeges vízzel elegendően feltöltött kádba. Majd fűtsünk a jeges vizes kás alá, melegítsük a jeges vizet. A héliumot tartalmazó tartály térfogata most nem változik ($V = \text{állandó}$), tehát a héliumé sem!! A hélium nyomását (P) egy tartályra szerelt nyomásmérővel mérjük. A $E_b = (3/2) \cdot p \cdot V$ összefüggés révén (mivel a gáz most hélium így $f=3$) a belsőenergia (E_b) mérhető (számolható).

A melegítés folyamatában a következő történik:

1. Amíg a jég el nem olvad a kádban lévő jeges vízben, addig a hélium nyomása (p) és így a belsőenergiája (E_b) sem változik;
2. Amikor a jég elolvadt, de a víz még nem forr a kádban, addig a hélium nyomása (p) és a belsőenergiája (E_b) folyamatosan növekszik;
3. Ahogy a víz felforr a gázban a hélium nyomása (p) és a belsőenergiája (E_b) nem változik tovább.

- Az 1. és a 3. esetben nincs hőátadás. Hiszen a térfogat állandósága ($V = \text{állandó}$) miatt a "térfogati" munka is nulla ($W=0$), így $E_b = \text{állandó}$ miatt ($\Delta E=0$), $Q=0$.
- A 2. esetben a gáz (a tartály vékony fém falán keresztül) hőt vesz fel a melegedő víztől, mivel p és így E_b is növekszik.

Ezt úgy értelmezhetjük, hogy az 1. és 3. esetben a gáz és a kádban lévő víz "termikus" értelemben, egyensúlyban van. Míg a 2. esetben hő áramlik a melegedő vízből a gázba, mely úgy mutatkozik meg, hogy a gáz belső energiája (E_b) növekszik.

Celsius skála

Ha a héliumot tartalmazó tartály nyomásmérőjének skáláját átfestjük úgy, hogy 0 értéket mutasson az 1. esetben és 100-at a 3. esetben, a skála e két értéke közötti részt felosztjuk 100 egyenlő részre (ez 100 egység), és az így kapott egységeket a 0 érték alatt és a 100-as érték fölött és felfestjük valamennyi, akkor egy Celsius-fokban mérő hőmérőt, illetve egy Celsius-fokban számolt hőmérsékleti skálát kapunk (a Celsiusban mért hőmérséklet jel: t /mint az időnek!!/. Persze jelen (héliumos) rendszerünkkel összevetve beállíthatóak (kalibrálhatóak) másrendszerű (pl. higanyos, alkoholos, stb.) hőmérők is.

(Folytatás a következő oldalon.)

Az ideálisgázokra vonatkozó további törvények, képletek:

$E_b = (f/2) \cdot p \cdot V$ (már ismerjük), más formákban: $p \cdot V = (2/f) \cdot E_b = (2/f) \cdot N \cdot (1/2) \cdot m_0 v^2 = (1/f) \cdot (N \cdot m_0) v^2 = (1/f) \cdot m \cdot v^2$ ("f" az adott gáz részecske szabadsági foka: 3,5,6, "N" a részecskék száma, m_0 egy részecske tömege, "v" a részecskék átlagos sebessége, $m = N \cdot m_0$ a gáz tömege)

Az ideális gáz egyesített gáztörvénye: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, azaz $(p \cdot V)/T = n \cdot R$ (ami állandó, ha gáz mennyisége nem változik), alkalmanként használjuk $(p_1 \cdot V_1)/T_1 = (p_2 \cdot V_2)/T_2$ alakban is.

($T = t + 273$ a hőmérséklet Kelvinben $\Delta T = \Delta t$, "n" az anyagmennyiség – a mólok száma, $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ univerzális gázállandó)

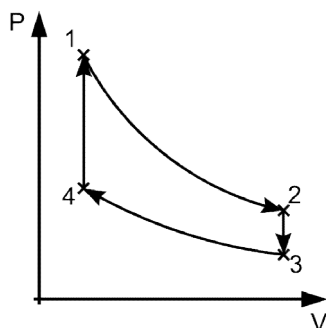
A "n" helyébe helyettesíthető: $n = m/M$, $n = N/N_A$

("M" relatív molekulatömeg gramm/mol-ban, ha szükséges átváltandó kg/mol-ba, N a részecskék száma, $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$ az Avogadro féle szám).

$p \cdot V = (m/M) \cdot R \cdot T = (N/N_A) \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$ ($k = R/N_A = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ a Boltzmann-állandó)

Ezek alapján:

$E_b = (f/2) \cdot p \cdot V = (f/2) \cdot n \cdot R \cdot T = (f/2) \cdot N \cdot k \cdot T$ (ezzel teljessé vált a hőmérséklet értelmezése: $E_b \sim T$).



Állapothatározók: p, V, T . A termodinamikai folyamatok ezek értékeivel megadott állapotok közötti átmenetek, változások. Fontos a "p-V" grafikon, többnyire ezen ábrázoljuk a folyamatokat. A $T = \text{állandó}$ esetnek megfelelő görbék a p-V grafikonon hiperbola darabok. Nyilván a $p = \text{állandó}$ és a $V = \text{állandó}$ esetek görbéi szakaszok ("vízszintes", "függőleges").

Speciális folyamatok:

Izotermikus: $T = \text{állandó}$;

Izochor: $V = \text{állandó}$;

Izobár: $p = \text{állandó}$;

Adiabatikus: $Q = 0$.

I. főtétel

$\Delta E_b = Q + W$ (tehát nem csak $\Delta E_b = W$!!)

Az I. főtétel szerepe nem az, hogy Q és W ismeretében kiszámoljuk a belsőenergia megváltozását! Hiszen ΔE_b a fentiekben emlegetett módokon többnyire számolható, illetve W (a térfogati munka) pedig a p-V-ra rajzolt folyamat-grafikon görbealatti területe illetve kis térfogat változásnál, illetve $p = \text{állandó}$ esetben pedig $W = -p \cdot \Delta V$. Tehát normális esetben az I. főtétel a Q kiszámításra szolgál – bár sok "megcsinált" feladattal találkozhatunk, ami ki van facsarva, valamelyik képlet gyakoroltatás végett.

Az I. főtétel következményei a speciális folyamatok tekintetében

Izoterm ($T = \text{állandó}$)

$T = \text{állandó}$ azaz $\Delta T = 0$, így $E_b = (f/2) \cdot n \cdot R \cdot T$ miatt $\Delta E_b = 0$ azaz I. főtétel $0 = Q + W$ vagy $Q = -W$ alakban írható.

Tehát ha képesek vagyunk meghatározni a hiperbola ($T = \text{állandó}$ hoz az tartozik p-V-n) alatti területet, azaz a térfogati munkát W -t, akkor tudjuk mennyi a Q . Megjegyzem, a W képletében eleve van egy mínuszjel, mivel az összenyomást, a gázon végzett munkát (azaz a gáz ezáltal energia növekedését) akarjuk pozitívnak beállítani, azonban összenyomásnál a ΔV negatív (kicsiből kell nagyot kivonni), ezért kell eleve a mínuszjel. Ez középiskolában elegendő is.

(Van azonban egy képlet erre az esetre – melyet emelt matekon meg is tudok majd magyarázni:

$W = -n \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1)$, V_1, V_2 a kezdő és a végső térfogat, az $\ln()$ pedig egy logaritmust jelent, pontosabban az "e" alapú logaritmust – a számológépen $\ln$ a jele. Tehát izoterm folyamat esetén $Q = n \cdot R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1)$.)

Izichor ($V = \text{állandó}$)

Mivel nem változik a térfogat nem lehet térfogati munka, azaz $W = 0$. Így az első főtétel $\Delta E_b = Q$ alakban írható. Tehát ez esetben $Q_v = \Delta E_b = (f/2) \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ (a v index jelzi, hogy állandó térfogat melletti hőátadás).

(Folytatás a következő oldalon.)

Izobár ($p=\text{állandó}$)

Mivel a nyomás állandó, ezért a térfogati munka $W = -p \Delta V$, azaz $\Delta E_b = Q - p \Delta V$, illetve $Q_p = \Delta E_b - W$ (p index jelzi, hogy állandó nyomás alatti hőátadás).

Számoljunk picit:

Legyen T_1, T_2 a kezdeti, illetve a végső hőmérséklet, V_1, V_2 pedig a kezdeti és a végső térfogat, p állandó.

Használjuk korábbi képleteket:

$pV_1 = nR \cdot T_1$, illetve $pV_2 = nR \cdot T_2$, ha kivonom a jobboldaliból a baloldalt: $pV_2 - pV_1 = nR \cdot T_2 - nR \cdot T_1$.

Kiemelve, amit lehet: $p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$

Számoljuk a térfogati munkát: $W = -p \Delta V = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$, (a fenti sor miatt).

Számoljuk a belsőenergiát: $\Delta E_b = (f/2) \cdot nR \Delta T = (f/2) \cdot nR(T_2 - T_1)$.

Tehát $Q_p = \Delta E_b - W = (f/2) \cdot nR(T_2 - T_1) - (-nR(T_2 - T_1)) = (f/2 + 1) \cdot nR(T_2 - T_1)$, $T_2 - T_1 = \Delta T$.

Adiabatikus ($Q=0$)

Mivel Q nulla, így $\Delta E_b = W$, azaz $W = \Delta E_b = (f/2) \cdot nR \Delta T = (f/2) \cdot nR(T_2 - T_1)$, $T_2 - T_1 = \Delta T$.

Fajhő

Általános formulával $c = Q/(m \Delta T)$, a Q a felvett vagy az leadott hő, az " m " a gáz tömege, ΔT a hőáramlás következtében kialakult hőmérsékletváltozás (lehet plusz vagy mínusz). Azaz $Q = c \cdot m \Delta T$, ezzel akkor van értelme foglalkozni, ha " c " ebben az egyenletben anyagi állandó és nem függ pl. T -től vagy a folyamat közbeeső állapotaitól – úgy is mondható, hogy Q egyenesen arányos ΔT -vel (" m " állandó, ha nem változik a gáz mennyisége). Feltehető a kérdés – mikor egyenesen arányos a Q a ΔT -vel? A $\Delta E_b = (f/2) \cdot nR \Delta T$ képletből tudjuk, hogy a ΔE_b egyenesen arányos a ΔT -vel, tehát az I. főtétele ($\Delta E_b = Q + W$) miatt Q pontosan akkor egyenesen arányos a ΔT -vel, ha W is egyenesen arányos a ΔT -vel (nem sok ilyen van). Nézzünk csak utána, mely megismert folyamatok ilyenek:

- izobár: $W = -p \Delta V$, mivel $p = \text{állandó}$, így ez jó, itt $Q_p = (f/2 + 1) \cdot nR \Delta T$, lásd följebb.
- izochor: $W = 0$ tehát írható, hogy $W = 0 \cdot \Delta T$, tehát ez is jó, itt $Q_v = (f/2) \cdot nR \Delta T$, lásd följebb.
- adiabatikus: $Q = 0$, tehát írható, hogy $Q = 0 \cdot \Delta T$, persze ez nem olyannyira izgalmas, mert a $Q = 0$ miatt a c (fajhő) is nulla.

Ezen esetekben tehát konstans a fajhő, némi számolás.

Izobár esetben ($p=\text{állandó}$):

Az állandó nyomáson végbemenő folyamatoknál érvényes fajhő: c_p

Mint már beláttuk $Q_p = (f/2 + 1) \cdot nR \Delta T$, a szokásos behelyettesítéssel: $Q_p = (f/2 + 1) \cdot (m/M) \cdot R \Delta T$.

Tehát $c_p = Q_p / (m \Delta T) = (f/2 + 1) \cdot (R/M)$ vagy az első zárójelben közös nevezőre hozva: $c_p = ((f+2)/2) \cdot (R/M)$.

Izochor eset ($V=\text{állandó}$):

Az állandó térfogaton végbemenő folyamatoknál érvényes fajhő: c_v

Mint láttuk $Q_v = (f/2) \cdot nR \Delta T$, a szokásos behelyettesítéssel: $Q_v = (f/2) \cdot (m/M) \cdot R \Delta T$, tehát

$c_v = Q_v / (m \Delta T) = (f/2) \cdot (R/M)$.

($R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$) az univerzális gázállandó, " M " a gáz relatív molekulatömege gramm/mol-ban, f a atom/gázmolekula szabadsági foka: 3, 5, 6.)

Tehát az izobár és izochor folyamatokban ezekkel a fajhőkkel számolhatunk: $Q_p = c_p \cdot m \Delta T$, illetve $Q_v = c_v \cdot m \Delta T$ (mértékegység: $\text{J/(kg} \cdot \text{K)}$), Celsius is elehet benne, mindegy. Lehet viszont $\text{J/(gramm} \cdot \text{K)}$ is, ez nem mindegy, erre figyelni kell. Láthatóan $c_v < c_p$.

A fenti számolásokból kiderül, hogy általában igaz: $E_b = c_v \cdot m \cdot T$ (csak c_v -vel igaz!), hiszen $c_v = (f/2) \cdot (R/M)$ -t behelyettesítve, $m/M = n$ miatt, azt kapjuk: $E_b = (f/2) \cdot nR \cdot T$, ez pedig általában igaz (persze: $\Delta E_b = (f/2) \cdot nR \Delta T$). A c_v és az említett képlet tehát egy egyszerű lehetőség lehet a belső energia kiszámítására.

Összefoglalva:

- izobár folyamatnál: $\Delta E_b = c_v \cdot m \Delta T$, illetve $Q_p = c_p \cdot m \Delta T$, $W = (c_p - c_v) \cdot m \Delta T$;
- izochor folyamatnál: $\Delta E_b = Q_v = c_v \cdot m \Delta T$, $W = 0$.

(Folytatás a következő oldalon.)

Mintafeladatok megoldása

Tankönyv 162 oldal, 5.

Izobár folyamat, $p=120 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $V_1=800 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, $V_2=200 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, $Q=-1400 \text{ J}$.

Szerintem a -1400J falsadat, valahogy rosszul van megadva.

A feladat gondolom, ezt a számolást várja:

$$W = -p(V_2 - V_1) = -120 \cdot 10^3 \cdot (-600 \cdot 10^{-6}) = 72 \text{ J}.$$

Így $\Delta E_b = -1400 + 72 = -1328 \text{ J}$ (az I. főtétel miatt: $\Delta E_b = Q + W$)

De ebből $\Delta E_b = (f/2) \cdot p \cdot (V_2 - V_1) = (f/2) \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot (-600 \cdot 10^{-6}) = (f/2) \cdot (-72)$ miatt, $-1328 = (f/2) \cdot (-72)$, ebből pedig f-re butaság jön ki.

Ha megadja, hogy milyen gázról van szó, vagyis f ismert (legyen mondjuk $f=5$), akkor a számolás a következő:

$$W = -p(V_2 - V_1) = -120 \cdot 10^3 \cdot (-600 \cdot 10^{-6}) = 72 \text{ J}.$$

$$\Delta E_b = (f/2) \cdot p \cdot (V_2 - V_1) = (5/2) \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot (-600 \cdot 10^{-6}) = (5/2) \cdot (-72) = -180 \text{ J}, \text{ azaz } -180 = Q + 72, Q = -252 \text{ J}$$

Tankönyv 162 oldal, 6.

Izochor folyamat: kétatomos azaz $f=5$, $V=\text{állandó}$, $W=0$, $T_1=300 \text{ K}$, $p_1=100 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $p_2=200 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $V=6 \text{ m}^3$.

Mivel $Q = \Delta E_b = (5/2) \cdot p \cdot V$, így $\Delta E_b = (5/2) \cdot (p_2 - p_1) \cdot V = (5/2) \cdot (100 \cdot 10^3) \cdot 6 = 1500 \cdot 10^3 \text{ J}$, Mivel $W=0$, így $Q = 1500 \cdot 10^3 \text{ J}$.

Tankönyv 162 oldal, 7.

(Vigyázat ez V-T grafikon)

Izochor folyamat tehát ez is, $W=0$, nitrogén $f=5$, $p_1=140 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $T_1=200 \text{ K}$, $T_2=400 \text{ K}$, $V=2 \text{ m}^3$.

$Q = \Delta E_b = (5/2) \cdot (p_2 - p_1) \cdot V$, $p_2/T_2 = p_1/T_1$, $p_2 = p_1 \cdot (T_2/T_1)$, azaz

$$Q = (5/2) \cdot (p_1 \cdot (T_2/T_1) - p_1) \cdot V = (5/2) \cdot p_1 \cdot ((T_2/T_1) - 1) \cdot V = (5/2) \cdot 140 \cdot 10^3 \cdot (400/200 - 1) \cdot 2 = 700 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Tankönyv 162 oldal, 8.

Izobár folyamat, hélium $f=3$, $M=4$, $m=120 \text{ g} \rightarrow n=120/4=30 \text{ mol}$, $p=140 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ állandó, $T_1=293 \text{ K}$, $T_2=333 \text{ K}$, $V_1=3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. A V_2 megadását nem értem, hiszen azt meghatározzák az eddigi adatok.

$$V_2 = V_1 \cdot (T_2/T_1) = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\Delta E_b = (f/2) \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = (3/2) \cdot 30 \cdot 8,31 \cdot 40 = 14958 \text{ J},$$

$$W = -p \Delta V = -p(V_2 - V_1) = -140 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} = -56 \text{ J}, \text{ így } Q = \Delta E_b - W = 14958 - (-56) = 15014 \text{ J}.$$

Nézzék át, keressék a hibákat és oldják meg a többi feladatot!