

Geometria alapok

I. Egy kis visszatekintés

A matematikai tudás jó ideig (kezdve az ókori egyiptomi idők kezdeteitől) csak számolási, számítási, szerkesztési ismeretek gyűjtemény volt. A mai értelemben vett matematikáról Euklidész (vagy Eukleidész, i.e. 300 körül) Elemek (Στοιχεία, Sztoikheia) című – az addigi geometriai/matematikai ismereteket összegző, rendszerező, az axiomatikus módszert először alkalmazó – művének megszületésétől beszélhetünk.

Euklidész műve a görög matematikusok több százéves céltudatos munkájának összegzett eredménye, melyben (s ez a legfontosabb) - ahogy Proklosz Euklidészt magyarázva kifejti - külön kell tárgyalni a princípiumokat (elvek: posztulátumok, axiómák) melyeket bizonyítás nélkül fogadunk el igaznak, és külön azokat az állításokat, melyeket az előbbiekből vezethetünk le (theórémák - tételek).

A matematika tehát olyan bebizonyított állítások, tételek hálózata, melyek bizonyítás nélkül elfogadott elvekre (axiómákra) épülnek. Az axiómák és a tételek szétválasztása, azaz az axiomatikus módszer a matematika (és sok más tudomány) fejlődését, eredményességét, alkalmazhatóságát alapozta meg.

Hogy miért igyekeztek a görög matematikusok, hogy összeállítsák a matematikai állítások (tételek) összefüggő rendszerét, illetve hogyan jutottak el oda, hogy így értsék és így építsék fel a matematika rendszerét? Miért is kell szigorúan bizonyítani az állításokat és szétválasztva tárgyalni az elveket (axiómákat) a tételektől?

A gyakorlat alapján megszerezhető matematikai ismereteket - amelyeket gyakran használunk a mindennapokban - a gyakorlat alapján elégségesen igazoltnak tekinthetjük. Ellenben a matematika természetű megfigyelések egy (igen jelentős) részének igaz vagy hamis voltáról nem lehet megbizonyosodni pusztán a gyakorlat alapján. Ezért merült fel a matematikai állítások elméleti bizonyításának szükségessége már a görögöknél. Pl.:

- A négyzet átlója nem összemérhető az oldallal.
- Végtelen sok prímszám van.

No meg azért is, mert, ha valamit egy korábbi igaznak tudott állításból logikai fejtegetések révén le lehet vezetni, akkor rögtön alkalmazható is a gyakorlatban.

A bizonyítás kérdése már igen korán felmerült a görög filozófiában. Az eleai filozófusok i.e. 5. sz. első felében már rájöttek arra, hogy az érzékszervek útján nyert benyomásaink, tapasztalataink tudományos viszonylatban megbízhatatlanok.

Természetesnek tűnő igény, hogy mindet bizonyítani kell, azaz csak az az igaz, ami bizonyítható. De ha mindent (valami másból) bizonyítani akarunk az ellentmondáshoz vezet s lehetetlen is. Az eleai filozófia abból (az alapvető - s egyébként helyes - következtetési szabályból) indult ki, hogy hamisnak tekinthető az az állítás melyből hamis állítás vezethető le. Íj módon mindent cáfolni igyekeztek más igaznak vagy éppen hamisnak látszó állításokra támaszkodva. "Rendszertelen" felfogásukban semmiről nem feltételezték, hogy igaz. Ez pedig egy kényelmes, de terméketlen felfogáshoz vezethet - mármint, hogy talán semmi sem igaz...

A megoldás az, hogy el kell fogadni bizonyítási igény nélkül egyes állításokat (melyek minden kétségen felül állónak látszanak - axiómák) igaznak és ezekre építhetők a további vizsgálatok, azaz keresni azokat az állításokat melyek levezethetők a kiinduló alapállításokból (tételek).

(Egy ilyen alapvetéssel meghatározzuk, milyen modellt alkotunk, milyennek gondoljuk a teret, a világot.)

Igazán jó axiómákat kiválasztani nem is olyan könnyű! Egyrészt ügyelni kell, hogy az axiómákból ne következzenek ellentmondó állítások, továbbá hogy egyik axióma se legyen levezethető a többiből -

azaz egymástól független axiómákra alapozott ellentmondásmentes elméletet kell építeni. Illetve főleg bonyolítja az axiomatizálást, ha olyan axiómarendszert szeretnénk alkotni, mely világunk egy helyes "modellje" lehet.

A világ megismerésének tudományos módja tehát, ha olyan igénnyel alkotunk meg egy axiómarendszert, hogy az arra alapozott elmélet (hibahatáron belül) helyesen írja le világunkat vagy annak egy részét. Hogy ez mennyire van így, azt csak gyakorlati mérésekkel igazolhatjuk. Egy helyesen épített axiomatikus matematikai modell (legyen az akár pl. az euklideszi geometria) nem feltétlenül adja a világ pontos leírását.

Fontos felfogás, hogy a világ megismerése, illetve a gyakorlati problémák megoldása végett a matematikának fontos feladata - a világ leírásának direkt szándéka nélkül is - különböző axiómarendszerek, avagy adott alapfeltevésekre alapozott struktúrák vizsgálat, tulajdonságaik megállapítása.

Azonnal feltűnik Euklidészt olvasva, hogy megkülönböztet háromféle alapelv típust (princípiumok): definíciókat, posztulátumokat, axiómákat.

A definíciók inkább afféle magyarázatok, beszédmódbeli megállapodások (pl. az első: a pont az aminek nincs kiterjedése), melyek szükségesek lehetnek az érthetőség okán. Azonban a mai matematika definíció felfogása más, pl. nem definiál olyan fogalmakat mint a pont, illetve a definíciókat nem sorolja a modellt meghatározó alapfeltevések közé.

Sokkal érdekesebb viszont a posztulátumok és az axiómák csoportjának megkülönböztetése. Mai szemmel ezek mindegyike axióma. Mi akkor a görögök megkülönböztetésének oka?

Posztulátum (latin szó, görögül αἰτέμα). Ahogy Szabó Árpád írja az 1983-ban kiadott *Elemek* előszavában: "A didaktikus vita résztvevőinek előre meg kellett egyezniük a közösen elfogadott kiinduló tételekben. De előfordult az is, hogy csak egyik résztvevő kérte (követelte, posztulálta) egy-egy elvnek az elfogadását, de nem volt bizonyos az, hogy hozzájárul-e ehhez más is. Ilyen egyoldalúan követelt elv volta a posztulátum."

A geometriai alakzatok megszerkeszthetősége érdekében az *Elemekben* Euklidész első két posztulátuma lerögzíti: 1. Minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható; 2. Véges egyenes vonal (szakasz) egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen; A harmadik posztulátum tetszőleges sugarú kör megszerkeszthetőségét biztosítja.

Az első három posztulátum végül is (szakasz, körrajzolás) a mozgás megengedését követeli meg. Azonban az eleai filozófia tagadta a mozgás lehetőségét, így csak posztulálni lehetett a vonalzó és a körző használatának lehetőségét.

Külön idetartozó érdekesség a híres 5. posztulátum esete: Ha két egyenest metsz egy harmadik és e harmadik egyenes egyik oldalán a két belső szög összege egyenesszögnél kisebb, akkor az első két egyenes ezen az oldalon metszi egymást.

Ezen állítás igazolása az addig rögzített axiómákból Eukleidésznek nem sikerült. Az V. posztulátum nélküli axiómákra alapozva kezdett a tételek bizonyítását, azonban így módon az első könyv 17. tétele megfordításának bizonyítása leküzdhetetlennek bizonyult. Így vélhetően ezt az állítást posztulálta, azaz megjelenítette V. posztulátumként. Nyilván az V. posztulátum bizonyítását ő maga is eleve szükségesnek tartotta (inkább bizonyítandó tételnek gondolta), hiszen nem az axiómák közé csak a posztulátumok közé sorolta).

Később az V. posztulátum a II. századbeli Ptolemaiosz Klaudiosz egyszerűbbel megfogalmazásában vált inkább közismerté: Egy egyeneshez valamely rá nem illeszkedő ponton át – közös síkjukban – pontosan egy olyan egyenes húzható, ami nem metszi az első egyenest (párhozamosnak nevezve, az egy síkban lévő és egymást nem metsző egyeneseket /meg egy egyenest önmagával is/).

Ebben a megfogalmazásban szokás az V. posztulátumot párhuzamossági axiómának nevezni. Mely igen sok munkát és izgalmat adott, mint egy kétezer éven át a matematikusoknak, kik elszántan próbálták megmutatni, hogy ez posztulátum tétel, azaz bizonyítható az alap axiómákból. Az egyik legelő (s talán a legalaposabb) korszakalkotó matematikus Bolyai János volt, aki igazolta, hogy az V. posztulátum valóban nem bizonyítható a rögzített axiómákból, nem tétel, így az axiómákhoz sorolható csak (lásd Bolyai avagy hiperbolikus geometria).

Eukleidész legnagyobb jelentőségű eredménye tehát az axiomatikus módszer bevezetése, bemutatása – emiatt tekinthető a modern matematika úttörőjének.

Érdemes idézni Kárteszi Ferenc (az ELTE egykori professzora) mondatait, amit Bolyai Appendixéhez fűzött kitűnő jegyzetének utolsó fejezetében ír:

"Az axiomatikus módszer modern formája - Bolyai és Lobacsevszkij műveinek kétségtelen hatására - Hilbert publikációiból alakult ki. Ez a módszer rövid idő alatt meghódította a korabeli matematikusokat, először az algebra majd az egész matematika újjáépítésére vezetett." [...]

"Ebben a felfogásban a matematikai vizsgálatot úgy végezzük, hogy nem magyarázzuk meg, mely objektumok azok, amelyekre vonatkozó állításunkat bizonyítjuk, hanem mint axiómákat felsoroljuk az objektumok ama tulajdonságait, amelyekre a bizonyítás felépül. Ilyen módon a bebizonyított tétel mindazokra az objektumokra nézve érvényes, amelyek az axiómáknak megfelelnek." [...]

"Az axiomatikus módszerek a matematika minden területére való benyomulása elmosta a felosztás klasszikus határait. A matematika alapvető fogalmainak új osztályozását és átrendezését a struktúraelméleti felfogás irányította. Ily módon a matematika egységesebbé vált. Az absztrakció elmélyülése, az általánosítás kiszélesedése a valóság megismerésében egyre előbbre vitte a tudományt."

Joggal írta Bolyai János "... semmiből egy ujj más világot teremtettem"

Az emberiség már réges-régen elkezdte az ismeretek gyűjtését a térről (melyben létezik, melynek ő is része). A megismeréshez rendszerezni kellett a tapasztalhatókat, és a tudományos megismerés módszerének is ki kellett alakulni. Ebben tehát a görögök voltak a legkorábban kiemelten eredményesek, az ő geometriai módszerük máig alapja minden tudománynak. A lényeg, hogy egyszerű alapfogalmakból kell kiindulni, melyekkel kapcsolatban egymástól független alapfeltevésekkel kell élni (axiómák) és ezekből következtetésekkel kell további megállapításokra jutni (tételek), illetve újabb fogalmakat értelmezni. Ezzel párhuzamosan mérésekkel kell ellenőrizni, hogy a felállított elméleti rendszer mennyire írja le helyesen a valóságot. Tehát, hogy elmélettréven végzett számítások, "jóslások" mennyire pontosak a valósághoz viszonyítva, azaz hogy az eltérés betudható-e a mérési hibának, vagy nem.

A legalapvetőbb térelemek tekintetében Eukleidész szerkesztési posztulátumai nyújtanak kiindulópontot. Az egyélű vonalzót és körzót használatát (ahogy már említettük) a következőképpen rögzítette:

- Minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható;
- Véges egyenes vonal (szakasz) egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen;
- Minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.

Mit jelent egy pontból egy másikba egyenest húzni, vagy másképpen fogalmazva, két pontot egyenessel összekötni? Persze mondhatjuk, hogy posztulátum - az is. :-) No de, milyen szemléletes, gyakorlati tevékenység van ennek a háttérében - honnan absztrahálták a görögök is. Az egyenes vonallal összekötni a vonalzóra vezet vissza, már mint, hogy van egy ilyen csoda valami, amivel egyenesen összeköthető két pont. Mi is az a vonalzó? Főleg mi az egyenes vonalzó? Nyilván amit annak látunk, már mint egyenesnek. Látunk, igen látunk. Esetleg valami modern lézeres kutyúval annak mérünk. Látni, avagy lézer sugárral mérni...

Tehát a nyomok valamiféle szemléletes (szemmel érzékelhető) egyenes elképzelésünkhöz vezetnek.

Természetesen az egyébként alapfogalom egyenes viszonyait jól meghatározzák a róla (is) szóló axiómák (illeszkedési, rendezési – lásd az euklideszi geometria Hilbert féle axiómarendszere). Így pl. az euklideszi geometria axiómarendszerére alapozva lehet méréseket s számításokat kreálni arra vonatkozóan, vajon tényleg mindenütt egyenes vonalban terjed-e a fény. Más kérdés, hogy ez elegendő pontossággal nem is könnyű. Illetve az is kérdés, hogy ha görbülés tapasztalható, vajon mi görbül a fény sugár avagy az Euklideszinek képzelt tér, avagy csak az euklideszi tér modellje nem mindig jól írja le a valós teret.

Apropó fény: Az egyenességről alkotott kialakult tapasztalatunk, elképzelésünk nyilvánvalóan a fénysugárra alapozódik (a lézer is az). Amikor egy vonalzót legyártunk egy olyan sablont használunk, amit fénysugár (nézés) segítségével hitelesítettünk.

Tehát egyenes fogalmunk a fény (terjedési) "pályájára" alapozott. Ellenben a geometriai egyenes viszonyait megadó axiómák nem használják (nem is használhatják) direkt módon a fénysugarat...

Innen ered az egyenes körüli zavar. Az egyenes vizuális képze és geometriai (nyilván magyarázatlan) alapfogalma között megértési szakadék tátong (egy diák számára legalább is).

Egyenesre nem is nagyon mondható példa a fénysugáron és esetleg a vékony szálon függő ólom golyó (fonál inga) fonálán kívül. Bár ez utóbbi is a gravitációval van kapcsolatban, és annak sem könnyebb a kapcsolata a geometriai axiómákkal (egyébként is egyre inkább úgy tűnik a gravitáció és a fény hasonló madár, legalábbis röptükben :-)).

A görögök tapasztalatunkat az igen közeli világról/ból, térről szereztek, az ily módon kapott modell ezt írhatja csak le jól – a távoli "világra" vonatkozó jósága feltételezés csupán. Ennek következtében nem feltétlen várhatjuk el, hogy a "távoli vidékek" modellünknek megfelelően viselkedjenek.

Maradjunk tehát egyelőre a mi kis "rajzasztalunkon" (akár sík, akár se :-)), esetleg kimerészkedhetünk "földet mérni" is. :-)

II. Alapvetés

Alapfogalom: Fogalom, amit nem definiálunk.

Axióma: Állítás, amit nem bizonyítunk.

Axiómarendszer: Alapfogalmak + axiómák.

(Az alapfogalmak ugyan nincsenek definiálva, azonban viszonyaikat az axiómák rögzítik.)

Alapfogalmak: pont, egyenes, sík, illeszkedés (pl. egyenes pontra, pont egyenesre), közötte fogalom (két különböző pont között egy harmadik pont – "rendezés").

Néhány példa axiómákra (látható "alapigazság" mivoltuk) – ezt a szakaszt nem kötelező elolvasni:

- Az illeszkedési csoportból: Bármely két pontra illeszkedik egy egyenes. Bármely két pontra legfeljebb egy egyenes illeszkedik. Minden egyenes tartalmaz legalább két pontot, és minden egyeneshez létezik legalább egy rá nem illeszkedő pont.)
- Rendezési csoportból: Ha az A, C pontok közrefogják a B pontot, akkor a C, A pontok is közrefogják a B pontot, és a három pont egy egyenesre esik. Bármely A, C ponthoz létezik az AC egyenesen B pont úgy, hogy A, B közrefogja C-t. Bármely három egy egyenesre eső pont közül pontosan egyet fog közre a másik kettő.
- Vannak még axiómák a párhuzamossággal, távolsággal, tengelyes tükrözéssel kapcsolatban (gondoljunk egy papírlap összehajtására).

Néhány kezdő fogalom:

- Félegyenes: Egy egyenesre illeszkedő pont az egyenes két részre osztja, mindkettő egy nyílt félegyenes – a pontot valamelyikhez hozzávéve, az egy zárt félegyenes vagy röviden félegyenes. Az illető pont a félegyenes kezdőpontja.
- Szög: Két darab közös kezdőpontú félegyenes két részre osztja közös síkjukat. Mindkettő egy szögtartomány (röviden szög), a félegyenesek a szögszárak. A közös kezdőpont a szög csúcsa. (Meg kell jelölni melyik szögre gondolunk.)
- Teljes szög: melynek szárai egybe esnek.
- Egyenes szög: Melynek szárai egy egyenest alkotnak (de nem esnek egybe).
- Kiegészítő szögek: Összegük egyenesszög.
- Mellékszög (ezt is szokás kiegészítő szögnek mondani): Egy szög mellékszöge egy másiknak, ha egyik száruk közös (csúcsuk is), másik szárai pedig egy egyenesre esik (de nem esnek egybe).
- Derékszög: Ha egy szög megegyezik mellékszögével, derékszögnek nevezzük (a teljes szög negyede).
- Két egyenes hajlásszöge: Metsző egyeneseknél a keletkezett legfeljebb kétféle szög közül a nem nagyobbik (nem metsző esetben picit bonyolultabb, akár csak síkoknál).
- Merőlegesség: Két egyenes merőleges, ha hajlásszögük derékszög.
- Tudni kell még a következő fogalmakat (lásd ált.isk): hegyesszög, tompaszög, párhuzamos szárú szögek, egyállású szögek, váltó szögek, csúcsszögek, pótszögek.
- Szakasz: Két különböző pont egyenesén, a pontok között lévő pontok halmaza egy nyílt szakasz, a pontokat is hozzászámítva zárt szakasz – a pontok a szakasz végpontjai.
- Szakaszfelező merőleges: A szakasz felezőpontján átmenő, a szakasz egyenesére merőleges egyenes.
- Szögfelező: Egy olyan félegyenes, melynek kezdőpontja azonos egy megadott szög csúcspontjával, és ez a félegyenes a szöget két egyenlő szögre osztja.

A következő fogalmak elemi jellegűek még: háromszög, háromszög egyenlőtlenség, a háromszög oldalfelező merőlegesei, szögfelezői, magasságvonalai, súlyvonalai, középvonalai, egyenlőszárú háromszög, egyenlő oldalú háromszög, derékszögű háromszög (oldalai elnevezései, illetve melyek a derékszögű háromszög befogóihoz tartozó magasságvonalai?), tengelyes tükrözés (síkbeli), a konvexitás fogalma.

Egyéb tudnivalók: Az alapvető négyszögek definíciói (trapéz, deltoid, paralelogramma, stb.), illetve osztályozásuk. Melyik az a négyszög, amely trapéz és deltoid is egyben? Konvex sokszögek belsőszögeinek összege, külső szögeinek összege, átlóinak száma.

Alapszerkesztések (a teendők leírása a lényeg): szakaszfelező merőleges, szögfelező, párhuzamos egyenes szerkesztése egy adott egyenessel egy adott ponton át (egy db vonalzóval és körzővel), a háromszög öt alapszerkesztése.

Tételek: a szakaszfelező merőleges tétele; egyenlőszárú háromszög tételei; háromszög belsőszögeinek összege; egy háromszög külső szöge nagyobb, mint a nem mellette lévő belső szög; háromszög szögeinek és oldalainak összefüggései; háromszög oldalfelező merőlegeseivel és szögfelezőivel kapcsolatos tételek (köré, be és hozzáírható körök).

Fontos: Euklideszi geometriában, három pont vagy egy egyenesre esik vagy egy körre.

* * *